第 2 节 同角三角函数基本关系（★★）

强化训练

1．（2022·海口模拟·★）已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 $\sin\alpha<0$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）$\frac{3}{4}$　（B）$-\frac{3}{4}$　（C）$\frac{4}{3}$　（D）$-\frac{4}{3}$

答案：A

解析：因为 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 $\sin\alpha<0$，所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$.

2．（2022·南昌三模·★★）若角 α 的终边不在坐标轴上，且 $\sin\alpha+2\cos\alpha=2$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　（B）$\frac{3}{4}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{3}{2}$

答案：A

解法 1：可将已知的等式与 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 联立，求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，再求 $\tan\alpha$，

联立 $\begin{cases}\sin\alpha+2\cos\alpha=2\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$ 可解得：$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=0\\ \cos\alpha=1\end{cases}$，

因为角 α 的终边不在坐标轴上，所以 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}$，故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.

解法 2：将已知的式子平方，左侧可化为关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的二次齐次式，这种式子可直接化正切，

因为 $\sin\alpha+2\cos\alpha=2$，所以 $(\sin\alpha+2\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=4$，

又 $\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+4\tan\alpha+4}{\tan^2\alpha+1}$，

所以 $\frac{\tan^2\alpha+4\tan\alpha+4}{\tan^2\alpha+1}=4$，解得：$\tan\alpha=\frac{4}{3}$ 或 0，因为 α 的终边不在坐标轴上，所以 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

3．（2022·湖北模拟·★★）已知 $2\sin\alpha\tan\alpha=3$，则 $\cos\alpha=$______.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：先将已知的等式切化弦，由题意，$2\sin\alpha\tan\alpha=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=3$，

要求 $\cos\alpha$，可将分子的 $\sin^2\alpha$ 换成 $1-\cos^2\alpha$，将函数名统一成余弦，解出 $\cos\alpha$，

所以 $\frac{2-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=3$，故 $2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$，解得：$\cos\alpha=\frac{1}{2}$ 或 -2（舍去）.

4.（2022•上海模拟•★★）若$\sin\theta=k\cos\theta$，则$\sin\theta\cos\theta=$______.（用k表示）

答案：$\dfrac{k}{k^2+1}$

解析：$\sin\theta=k\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=k$，所以$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{k}{k^2+1}$.

5.（2022•湖南模拟•★★）已知$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则$\dfrac{\cos2\alpha}{1-\sin2\alpha}=$______.

答案：$-\dfrac{1}{3}$

解析：因为$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，所以$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$，

$\dfrac{\cos2\alpha}{1-\sin2\alpha}$这个式子怎么化？已知的是$\tan\alpha$，所以考虑化单倍角，分母可化为$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$，故分子也就选择公式$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$了，分解因式后恰好可以和分母约分，

$\dfrac{\cos2\alpha}{1-\sin2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\dfrac{1}{3}$.

6.（2022•四川模拟•★★）已知$\sin\theta=2\cos\theta$，则$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}+\sin^2\theta=$（　　）

（A）$\dfrac{19}{5}$　（B）$\dfrac{16}{5}$　（C）$\dfrac{23}{10}$　（D）$\dfrac{17}{10}$

答案：C

解析：$\sin\theta=2\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=2$，可分别将$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}$和$\sin^2\theta$化正切计算，

所以$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta}=\dfrac{3}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{4}{5}$，故$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}+\sin^2\theta=\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{23}{10}$.

7.（2018•新课标II卷•★★★）已知$\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则$\sin(\alpha+\beta)=$______.

答案：$-\dfrac{1}{2}$

解析：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，怎样产生右边的两项？观察发现将所给等式平方即可，

$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\beta=1\\\cos\alpha+\sin\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta=1\\\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\cos\alpha\sin\beta=0\end{cases}$，两式相加得：$2+2\sin(\alpha+\beta)=1$，所以$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}$.

8.（★★★）（多选）已知$\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，以下选项正确的是（　　）

（A）$\sin2\alpha=\dfrac{24}{25}$　（B）$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$　（C）$\cos2\alpha=-\dfrac{7}{25}$　（D）$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\dfrac{7}{25}$

答案：BC

解析：A 项，$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}\Rightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin2\alpha=\dfrac{1}{25}$，

所以$\sin2\alpha=-\dfrac{24}{25}$，故 A 项错误；

B 项，将$\sin\alpha-\cos\alpha$平方，可与$\sin2\alpha$联系起来，

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha=1-(-\frac{24}{25})=\frac{49}{25}$，

开根号取正还是取负？可通过 $\sin 2\alpha$ 的符号结合 α 范围来看，由 A 项的分析过程知 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}<0$，

结合 $\alpha\in(0,\pi)$ 可得 $\sin\alpha>0$，所以 $\cos\alpha<0$，从而 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$，故 B 项正确；

C 项，$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{5}\times(-\frac{7}{5})=-\frac{7}{25}$，故 C 项正确；

D 项，$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$，故 D 项错误.

9.（2022·湖北四校联考·★★★）若 $a(\sin x+\cos x)\le 2+\sin x\cos x$ 对任意的 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，则实数 a 的最大值为_____.

答案： $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

解析： 将 $\sin x+\cos x$ 换元成 t，并将其平方，则 $\sin x\cos x$ 也能用 t 表示，

设 $t=\sin x+\cos x$，则 $t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，所以 $1<t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$，

又 $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x$，所以 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，

从而 $a(\sin x+\cos x)\le 2+\sin x\cos x$ 即为 $at\le 2+\frac{t^2-1}{2}$，也即 $a\le\frac{1}{2}(t+\frac{3}{t})$，

如图，函数 $f(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{3}{t})$ 在 $(1,\sqrt{2}]$ 上↘，所以 $f(t)_{\min}=f(\sqrt{2})=\frac{5\sqrt{2}}{4}$，

因为 $a\le f(t)$ 恒成立，所以 $a\le\frac{5\sqrt{2}}{4}$，故 a 的最大值为 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.